УДК 735.29.(32)

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ СОПРЯЖЕННОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Лемешкова Е.Н.
Научный руководитель – д. ф.-м. н. Андреев В.К.

Сибирский федеральный университет

1. Постановка задачи. Априорные оценки.

При рассмотрении однонаправленного движения в плоских слоях $-l_1 < y < 0$, $0 < y < l_2$, $l_2 < y < l_3$ с общими границами раздела $y = 0$, $y = l_2$ и твёрдыми стенками $y = -l_1$, $y = l_3$ возникает следующая начально-краевая задача [1]:

$$u_{1t} = \nu_1 u_{1yy} - f_1(t), -l_1 < y < 0; \tag{1}$$

$$u_{2t} = \nu_2 u_{2yy} - f_2(t), 0 < y < l_2; \tag{2}$$

$$u_{3t} = \nu_3 u_{3yy} - f_3(t), l_2 < y < l_3; \tag{3}$$

$$u_j(y, 0) = 0, \tag{4}$$

$$\mu_1 u_{1y}(0, t) - \mu_2 u_{2y}(0, t) = 0, \tag{5}$$

$$\mu_2 u_{2y}(l_2, t) - \mu_3 u_{3y}(l_2, t) = 0, \tag{6}$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), u_2(l_2, t) = u_3(l_2, t), \tag{7}$$

$$u_1(-l_1, t) = 0, u_3(l_3, t) = 0, \tag{8}$$

где функции $f_j(t)$ связаны равенствами $\rho_1 f_1 = \rho_2 f_2 = \rho_3 f_3$.

В (1) - (3), (5), (6) ν_j - кинематические вязкости, $\mu_j = \nu_j \rho_j$ - динамические вязкости, а ρ_j - плотности жидкостей, суть положительные постоянные (j=1, 2, 3).

Получим некоторые априорные оценки задачи (1) – (8). Умножим уравнения (1) – (3) на $\rho_1 u_1$, $\rho_2 u_2$, $\rho_3 u_3$, соответственно, и проинтегрируем по y. Складывая полученные равенства с использованием граничных условий (5) – (8), приходим к соотношению – закону сохранения энергии

$$\frac{dE(t)}{dt} + \mu_1 \int_{-l_1}^{0} u_{1y}^2\,dy + \mu_2 \int_{0}^{l_2} u_{2y}^2\,dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} u_{3y}^2\,dy = \rho_1 f_1 \left(\int_{-l_1}^{0} u_1\,dy + \int_{0}^{l_2} u_2\,dy + \right.$$
$$\left. + \int_{l_2}^{l_3} u_3\,dy \right) \tag{9}$$

где

$$E(t) = \frac{1}{2}\rho_1 \int_{-l_1}^{0} u_1^2\,dy + \frac{1}{2}\rho_2 \int_{0}^{l_2} u_2^2\,dy + \frac{1}{2}\rho_3 \int_{l_2}^{l_3} u_3^2\,dy \tag{10}$$

есть полная кинетическая энергия трёх слоёв.

Из (9), в частности, вытекает единственность решения задачи (1) – (8): если $f(t) = 0$, то и $u_1(y,t) = u_2(y,t) = u_3(y,t) \equiv 0$.

Равенство (9) позволяет установить при некоторых ограничениях на градиент давления асимптотическое поведение решения при t→∞. Действительно, для $u_1(y,t)$, $u_2(y,t)$, $u_3(y,t)$ справедливо обобщённое неравенство Фридрихса для составных областей

$$\int_{-l_1}^{0} u_1^2\, dy + \int_0^{l_2} u_2^2\, dy + \int_{l_2}^{l_3} u_3^2\, dy \le M(\mu_1 \int_{-l_1}^{0} u_{1y}^2\, dy + \mu_2 \int_0^{l_2} u_{2y}^2\, dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} u_{3y}^2\, dy) \tag{11}$$

Используя неравенства (11), Евклида и Коши – Буняковского, из (9) получаем неравенство

$$\frac{dE(t)}{dt} + 2\delta E(t) \le \delta_1 \sqrt{E(t)}|f(t)|, \tag{12}$$

где $\delta = \min\left(\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_3}\right)/M_0$, $\delta_1 = \sqrt{6}\max\left(\sqrt{\frac{l_1}{\rho_1}}, \sqrt{\frac{l_2}{\rho_2}}, \sqrt{\frac{l_3-l_2}{\rho_3}}\right)$, M_0 -минимальная положительная постоянная среди всех $M > 0$ из неравенства (11). В силу начальных условий (4) из (10) $E(t) = 0$, и (12) даёт оценку

$$E(t) \le \frac{\delta_1^2}{4}\left(\int_0^t |f_1(t)|e^{\delta t} dt\right)^2 e^{-2\delta t}. \tag{13}$$

Следовательно, если сходится интеграл $\int_0^\infty |f_1(t)|e^{\delta t} dt \equiv \sqrt{C_1}$, то неравенство (13) примет вид $E(t) \le \frac{\delta_1^2}{4} C_1 e^{-2\delta t}$ для всех $t \ge 0$. Поэтому желательно, чтобы в априорной оценке δ было как можно больше. Справедлива

Лемма. Имеет место неравенство (11) с постоянной M_0 не зависящей от $u_j(y)$ и являющейся решением вариационной задачи

$$M_0 = \sup_{w_j \in V}\left[\frac{\int_{-l_1}^{0} w_1^2 dy + \int_0^{l_2} w_2^2 dy + \int_{l_2}^{l_3} w_3^2 dy}{\mu_1 \int_{-l_1}^{0} w_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} w_{2y}^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy}\right], \tag{14}$$

множество V - подпространство прямого произведения $W_2^1(-l_1,0) \times W_2^1(0,l_2) \times$ $\times W_2^1(l_2,l_3)$, и для $w_j(y)$ выполнены граничные условия (5) - (8).

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$F(w_1,w_2,w_3) = \sup_{w_j \in V}\left[\frac{\int_{-l_1}^{0} w_1^2 dy + \int_0^{l_2} w_2^2 dy + \int_{l_2}^{l_3} w_3^2 dy}{\mu_1 \int_{-l_1}^{0} w_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} w_{2y}^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy}\right], \tag{15}$$

Очевидно, что функция $f(\tau) = F(w_1 + \tau h_1, w_2 + \tau h_2, w_3 + \tau h_3)$ имеет производную при $\tau = 0$ для всех $h_j \in V, j = 1,2,3$, а F дифференцируем по Фреше. Тогда существует первая вариация по Лагранжу функционала F в точке (w_1,w_2,w_3) и $\delta F(w_1,w_2,w_3)(h_1,h_2,h_3) = f'(0)$ (первая вариация здесь не выписывается ввиду громоздкости).

Пусть теперь на w_j достигается равенство (14). Имеем $F(w_1, w_2, w_3) = M_0$ и $\delta F(w_1, w_2, w_3)(h_1, h_2, h_3) = 0$. Пользуясь произволом функций $h_1 \in W_2^1(-l_1, 0), h_2 \in W_2^1(0, l_2), h_3 \in W_2^1(l_2, l_3)$, получим из выражения для первой вариации равенства

$$\int_{-l_1}^{0} \left(w_1 h_1 - \mu_1 M_0 w_{1y} h_{1y}\right) dy = 0, \int_{0}^{l_2} \left(w_2 h_2 - \mu_2 M_0 w_{2y} h_{2y}\right) dy = 0,$$

$$\int_{l_2}^{l_3} \left(w_3 h_3 - \mu_3 M_0 w_{3y} h_{3y}\right) dy = 0.$$

По лемме Дюбуа – Реймона [2] отсюда получим уравнения Эйлера вариационной задачи (14) (по этой лемме вторые производные w_{jyy} существуют)

$$w_{1yy} + \frac{1}{\mu_1 M_0} w_1 = 0, -l_1 < y < 0,$$

$$w_{2yy} + \frac{1}{\mu_2 M_0} w_2 = 0, 0 < y < l_2, \tag{16}$$

$$w_{3yy} + \frac{1}{\mu_3 M_0} w_3 = 0, l_2 < y < l_3.$$

Общие решения уравнений (16) имеют вид ($j = 1, 2, 3$)

$$w_j = C_1^j \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_j M_0}} y\right) + C_2^j \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_j M_0}} y\right).$$

С учётом граничных условий (5) – (8) получим систему линейных однородных уравнений на постоянные C_1^j, C_2^j

$$C_1^2 = \sqrt{\overline{\mu_1}} C_1^1, C_2^1 = C_2^2, C_2^1 = C_1^1 tg(a_1 a_3 z),$$

$$C_1^2 \sin(a_4 z) + C_2^2 \cos(a_4 z) - C_1^3 \sin(z) - C_2^3 \cos(z) = 0,$$

$$\sqrt{\overline{\mu_1}} (C_1^2 \cos(a_4 z) - C_2^2 \sin(a_4 z)) - C_1^3 \cos(z) + C_2^3 \sin(z) = 0,$$

$$C_1^3 \sin(a_2 z) + C_2^3 \cos(a_2 z) = 0.$$

Нетривиальное решение последней системы существует тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{\overline{\mu_2}} \sin\left((1 - a_2) z\right) \left(\sqrt{\overline{\mu_1}} \cos(a_4 z) - tg(a_1 a_3 z) \sin(a_4 z)\right) -$$

$$- \cos\left((1 - a_2) z\right) \left(\sqrt{\overline{\mu_1}} \sin(a_4 z) + tg(a_1 a_3 z) \cos(a_4 z)\right) = 0, \tag{17}$$

где $z = l_2/(\mu_3 M_0)^{1/2}$, $a_1 = l_1/l_2$, $a_2 = l_3/l_2$, $a_3 = (\overline{\mu_1 \mu_2})^{-1/2}$, $a_4 = (\overline{\mu_2})^{-1/2}$,

$\overline{\mu_1} = \mu_1/\mu_2$, $\overline{\mu_2} = \mu_2/\mu_3$.

Уравнение (17) относительно z имеет счётное число положительных решений. Минимальное среди них z_0 является искомым $M_0 = l_2^2/(\mu_3 z_0^2)$. В частности, при $a_2 = 1$, (толщины второго и третьего слоя совпадают) и $\overline{\mu_1} = 1$ (динамические вязкости первого и третьего слоя совпадают) получим $M_0 = l_2^2(a_4 + a_3 a_1)^2/(\mu_3 \pi^2)$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №11-01-00283.

Литература

[1] Лемешкова Е.Н., Решение начально - краевой задачи о совместном движении трёх вязких жидкостей в плоских слоях // Труды XLIII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам. Красноярск, СФУ. 2010. - с. 70-72.

[2] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В., Оптимальное управление, М., Наука, 1979. - с. 62.